数理解析研究所講究録
第 1880 巻 2014 年 17-22

Type-changing PDE and singularities of Monge characteristic systems

広島大学大学院理学研究科　渋谷 一博 (Kazuhiro Shibuya)
Department of Mathematics, Hiroshima University

1. はじめに

本稿の内容は最近の野田尚廣氏 (名古屋大学/OCAMI) との共同研究をまとめたものである (詳細は [NS1],[NS2] を参照).

Cartan, Goursat, Lie らの時代より微分方程式の幾何学的研究 (変数変換に関する微分方程式の分類, 解の存在非存在, 解の構成法など) が行われてきている. その後, それらの研究は Tanaka, Morimoto, Yamaguchi, Bryant らによって微分式系, 階別リー環の理論などを用いて定式化され, 現在でも発展してきている. その理論において正則と呼ばれる微分方程式のクラスには対応する微分式系が必ず存在することが知られており, その微分式系が持つ性質に著者は興味を持っている. 今回は特に 2 独立変数 1 未知関数 2 階の単独型偏微分方程式の中で type-changing 方程式と呼ばれる微分方程式に対して得られた結果を紹介する.

2 独立変数 1 未知関数 2 階の単独型偏微分方程式は双曲型, 放物型, 楕円型に分類されるが type-changing 方程式とは局所的に放物型のまわりに双曲型, 楕円型が混在する方程式である. type-changing 方程式は豊富な微分式系の例を供給し, それ自身が興味深い研究対象であるのみならず, 近年では極小曲面, 極大曲面との関わりもあり応用上でも非常に重要な微分方程式のクラスである. 野田尚廣氏との共同研究 [NS] において、ある種の正則性を仮定したクラスの type-changing 方程式に対して 2 独立変数 1 未知関数 2 階の過剰決定系の理論を用いた分類問題を扱った. それに対し、同様の正則性を仮定したクラスの type-changing 方程式に対する Monge 特性系 (単独型偏微分方程式の理論の中で重要な不変量) の振る舞いを研究し、その Monge 特性系の退化現象を明らかにした. そして, それによりその退化現象と以前の過剰決定系の理論を用いた研究の退化現象が完全に対応することを明らかにした (Theorem 5.6).

type-changing 方程式は単独方程式でありながら, 単独方程式と過剰決定系のふたつの側面を持ち, 今回の結果は type-changing 方程式の単独方程式としての性質 (Monge 特性系の性質) と過剰決定系としての性質 (過剰決定系としてのシンボルの性質) の対応を与えているという意味で非常に興味深い.

2. 微分式系、JET SPACE と 2 独立変数 1 未知関数 2 階単独型偏微分方程式

多様体 R とその接束 TR の部分束 D の組を微分式系と呼び (R, D) と表すこととする.

Example 2.1. $J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ を 2-jet space とする. すなわち, 8 次元多様体

$$J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) := \{(x, y, z, p, q, r, s, t)\}$$

とその接空間の部分束 (canonical differential system) $C^2 \subset T(J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}))$ の組を考える. ここで

$$C^2 := \{X \in T(J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})) \mid \varpi_0(X) = \varpi_1(X) = \varpi_2(X) = 0\},$$

$$\varpi_0 := dz - pdx - qdy\ ,\ \varpi_1 := dp - rdx - sdy\ ,\ \varpi_2 := dq - sdx - tdy.$$

この $(J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}), C^2)$ は 8 次元多様体上の階数 5 の微分式系である. ここで微分式系の階数とはベクトル束としての階数のことをいう.

Remark 2.2. ここでは jet space を局所的に定義したが, 幾何学的な定義に関しては [Y1],[Y2] を参照.

次に上記の Example 2.1 の 2-jet space を用いて微分方程式と微分式系の対応を与える. 2 独立変数 1 未知関数 2 階単独型偏微分方程式

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0 \tag{1}$$

を考える. ここで x, y を独立変数として

$$z = z(x,y)\ ,\ p = \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\ ,\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ ,\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

また (1) が正則であるとは "$(F_r, F_s, F_t) \neq (0,0,0)$" を満たすこととする (以降は正則な微分方程式のみを考える). 偏微分方程式 $F(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0$ に対し, $\Sigma := \{F = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ とし, C^2 の Σ への制限 $D = \{\iota^*\varpi_0 = \iota^*\varpi_1 = \iota^*\varpi_2 = 0\} \subset T\Sigma$ を考える ($\iota : \Sigma \to J^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$: inclusion). この (Σ, D) を偏微分方程式 (1) に対応する微分式系と呼ぶ. このとき偏微分方程式 $F(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0$ の解は微分式系 (Σ, D) の 2 次元積分多様体として捉えられる.

Remark 2.3. 一般に $\Sigma = \{F = 0\}$ は jet space の中の部分多様体になるとは限らない. また Σ が多様体であっても C^2 の Σ への制限 D は部分束になるとは限らない. しかし, 正則条件の下では $\Sigma = \{F = 0\}$ は余次元 1 の部分多様体であり, C^2 の Σ への制限 D は rank 4 の部分束になり, Σ から $J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ への射影は submersion になる.

3. Type-changing 方程式

Type-changing 方程式は 2 独立変数 1 未知関数 2 階単独型偏微分方程式 (1) の中の特別な方程式である. 偏微分方程式 (1) は判別式

$$\Delta := F_rF_t - \frac{1}{4}F_s^2$$

が正, 0, 負かにより楕円型, 放物型, 双曲型に分類される. 型の分類は対応する微分式系を用いると次のように記述されることが知られている:

Theorem 3.1. 正則な微分方程式 *(1)* に対し対応する微分式系を (Σ, D) とする.

(1) $w \in \Sigma$ で双曲型 *(*すなわち $\Delta(w) < 0$*)* $\Longleftrightarrow$ 次を満たす $w \in \Sigma$ の周りの局所 *coframe* $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2\}$ が存在する*:* $D = \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0\}$ かつ

$$d\theta_0 \equiv 0\ ,\ d\theta_1 \equiv \eta_1 \wedge \pi_1\ ,\ d\theta_2 \equiv \eta_2 \wedge \pi_2, \qquad \mathrm{mod}\ \ \theta_0, \theta_1, \theta_2.$$

(2) $w \in \Sigma$ で放物型 (すなわち $\Delta(w) = 0$) $\iff$ 次を満たす $w \in \Sigma$ の周りの局所 *coframe* $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2\}$ が存在する: $D = \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0\}$ かつ 点 w において

$$d\theta_0 \equiv 0\ ,\ d\theta_1 \equiv \eta_1 \wedge \pi_1\ ,\ d\theta_2 \equiv \eta_1 \wedge \pi_2 + \eta_2 \wedge \pi_1, \qquad \mathrm{mod}\ \ \theta_0, \theta_1, \theta_2.$$

(3) $w \in \Sigma$ で楕円型 (すなわち $\Delta(w) > 0$) $\iff$ 次を満たす $w \in \Sigma$ の周りの局所 *coframe* $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2\}$ が存在する: $D = \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0\}$ かつ

$$d\theta_0 \equiv 0\ ,\ d\theta_1 \equiv \eta_1 \wedge \pi_1 + \eta_2 \wedge \pi_2\ ,\ d\theta_2 \equiv \eta_1 \wedge \pi_2 - \eta_2 \wedge \pi_1, \qquad \mathrm{mod}\ \ \theta_0, \theta_1, \theta_2.$$

上の定理を用いると放物型の方程式に対して Monge 特性系 (rank 2 の部分束) が次のように定義される:

$$M := \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \eta_1 = \pi_1 = 0\} \subset T\Sigma.$$

Monge 特性系は微分式系 (Σ, D) の不変量である.

Remark 3.2. 放物型に対しては Monge 特性系 M がひとつ定義されたが、双曲型に対しては Monge 特性系 M_1, M_2 が二つ定義され、楕円型に対しては Monge 特性系は定義されない.

さて、偏微分方程式 (1) に対し対応する微分式系を (Σ, D) とし次の放物点全体から成る部分集合 Σ_p を考える:

$$\Sigma_p := \{F = \Delta = 0\} \subset \Sigma = \{F = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

ここで $\Delta := F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2$. このとき定義からすぐに次のことが分かる:

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \emptyset \iff \text{hyperbolic or elliptic} \\ \Sigma_p &= \Sigma \iff \text{parabolic} \end{aligned}$$

これに対し type-changing 方程式を次のように定義する.

Definition 3.3. *2* 独立変数 *1* 未知関数 *2* 階単独型正則偏微分方程式 *(1)* $F = 0$ が *type-changing* であるとは対応する Σ_p が真部分集合であることとする. $(\emptyset \subset \Sigma_p \subset \Sigma)$

一般に Σ_p はただの部分集合であるが $\Sigma_p \subset \Sigma^7$ が部分多様体であると仮定すると Type-changing は次の class に分けられる:

・$\dim \Sigma_p = 6$ のとき

(1) Σ_p の両側が双曲
(2) Σ_p の両側が楕円
(3) Σ_p の片側が双曲でもう片方が楕円

・$\dim \Sigma_p \leq 5$ のとき

(1) Σ_p の周りは双曲
(2) Σ_p の周りは楕円

Remark 3.4. 各クラスの例に関しては [NS1] を参照.

本稿に於いては部分多様体論、微分式系の理論を用いるために自然な次を仮定したクラスを考える.

仮定 1 2 独立変数 1 未知関数 2 階単独型正則偏微分方程式 (1) $F = 0$ は

$$\text{各点で } \{(F_r, F_s, F_t), (\Delta_r, \Delta_s, \Delta_t)\} \text{ が一次独立}$$

を満たす.

Remark 3.5. 仮定1により

$$\Sigma_p := \{F = \Delta = 0\} \subset \Sigma^7 := \{F = 0\}$$

は余次元1の部分多様体となる. また仮定1の下では Σ_p の片側が双曲でもう片方が楕円の $\dim \Sigma_p = 6$ の3の case になる.

Example 3.6. $F = r - 2st + \frac{2}{3}t^3 = 0$ を考えると判別式は $\Delta = -2s + t^2$ であり対応する Σ_p は

$$\Sigma_p = \{r = 2st - \frac{2}{3}t^3, s = \frac{t^2}{2}\} = \{r = \frac{t^3}{3}, s = \frac{t^2}{2}\}$$

であるので仮定1を満たす type-changing 方程式である.

上記の例で出てきた2独立変数1未知関数2階の過剰決定系偏微分方程式 $r = \frac{t^3}{3}, s = \frac{t^2}{2}$ は Cartan の過剰決定系と呼ばれ, その方程式を保つ無限小接触変換のなすリー環が14次元例外型単純単純リー環 G_2 になることが知られている. つまり仮定1を満たす type-changing 方程式は Cartan の過剰決定系という重要な方程式を例として含むクラスになっている.

4. Type-changing 方程式と過剰決定系

前節の最後にも述べたように, type-changing 方程式は Cartan の過剰決定系という過剰決定系の理論の中で重要な方程式を含んでおり type-changing 方程式と過剰決定系の理論の相性の良さが示唆されている. そこで一般の2独立変数1未知関数2階過剰決定系の理論を簡単に復習する.

2独立変数1未知関数2階過剰決定系

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0\ ,\ G(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{2}$$

を考える. また (2) は (F_r, F_s, F_t) と (G_r, G_s, G_t) が一次独立のとき正則という (以後は正則な方程式のみを考える). 単独方程式の時と同様に 2-jet space を介して (2) に次のように微分式系 (R, E) を対応させる:

$$R := \{F = G = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})\ ,\ E := C^2|_R.$$

このとき正則性の仮定より $\dim R = 6$, rank $E = 3$.

単独方程式は双曲、放物、楕円の3つの type に分けられたが過剰決定系は次の4つの type に分けられる.

Theorem 4.1. *(Cartan, Noda-S-Yamaguchi)*
過剰決定系 $R = \{F = G = 0\}$ の標準形は次の4つに分類される:
($E = \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0\}$, $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2, \pi\}$: coframe)

(0)-type

$$\begin{cases} d\theta_0 & \equiv \omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 \quad \mod \theta_0 \\ d\theta_1 & \equiv \omega_1 \wedge \omega_2 \quad \mod \theta_0, \theta_1, \theta_2 \\ d\theta_2 & \equiv \omega_2 \wedge \pi \quad \mod \theta_0, \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

(i)-type

$$\begin{cases} d\theta_0 & \equiv \omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 \quad \mod \theta_0 \\ d\theta_1 & \equiv 0 \quad \mod \theta_0, \theta_1, \theta_2 \\ d\theta_2 & \equiv \omega_2 \wedge \pi \quad \mod \theta_0, \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

(ii)-type

$$\begin{cases} d\theta_0 & \equiv \omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 \quad \mod \theta_0 \\ d\theta_1 & \equiv \omega_2 \wedge \pi \quad \mod \theta_0, \theta_1, \theta_2 \\ d\theta_2 & \equiv \omega_1 \wedge \pi \quad \mod \theta_0, \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

(iii)-type

$$\begin{cases} d\theta_0 & \equiv \omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 \quad \mod \theta_0 \\ d\theta_1 & \equiv \omega_1 \wedge \pi \quad \mod \theta_0, \theta_1, \theta_2 \\ d\theta_2 & \equiv \omega_2 \wedge \pi \quad \mod \theta_0, \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

Remark 4.2. Cartan の過剰決定系は involutive type と呼ばれる (i)-type になる.

5. 主定理

仮定 1 を満たす type-changing 方程式に対して $F = \Delta = 0$ を考えるとそれは正則過剰決定系となるので前節の理論が適用できる. このとき $(\Sigma_p = \{F = \Delta = 0\}, D_p := C^2|_{\Sigma_p})$ を対応する微分式系とすると

Theorem 5.1. (Σ_p, D_p) は *(iii)-type* にはならない.

さらに次の判定法が得られる:

Theorem 5.2. 仮定 *1* を満たす *type-changing* 方程式が

$$r = f(x, y, z, p, q, s, t)$$

と表されているとき,

$$\begin{aligned} (ii)\text{-type} &\iff f_s\Delta_s + 2\Delta_t \neq 0. \\ (0)\text{-type} &\iff f_s\Delta_s + 2\Delta_t = 0\ ,\ 2\tfrac{df}{dy}\Delta_s - f_s\tfrac{d\Delta}{dy} + 2\tfrac{d\Delta}{dx} \neq 0. \\ (i)\text{-type} &\iff f_s\Delta_s + 2\Delta_t = 0\ ,\ 2\tfrac{df}{dy}\Delta_s - f_s\tfrac{d\Delta}{dy} + 2\tfrac{d\Delta}{dx} = 0. \end{aligned}$$

が成り立つ.

Remark 5.3. Theorem 5.2 の仮定 "$r = f(x, y, z, p, q, s, t)$ と表されている" は本質的ではない. すなわち type-changing 方程式 $F = 0$ は接触変換と陰関数定理により理論的にはいつでも $r = f(x, y, z, p, q, s, t)$ の形に表すことが出来る.

次に type-changing 方程式の単独方程式の性質に関して述べるため Monge 特性系を定義する:

Definition 5.4. $F=0$ を仮定 *1* を満たす *type-changing* 方程式とする *(*単独方程式として (Σ, D) が対応*)*. このとき Σ_p は放物点の集合なので各点ごとの放物型の *Monge* 特性系の引き戻しを考えて、それを *type-changing* 方程式の *Monge* 特性系を定義する. すなわち

$$M_p := \{\iota^*\theta_0 = \iota^*\theta_1 = \iota^*\theta_2 = \iota^*\eta_1 = \iota^*\pi_1 = 0\} \subset T\Sigma_p$$

ここで $\iota : \Sigma_p \to \Sigma$ は *inclusion.*

一般に M_p は Σ_p 上の部分束になるとは限らない. generic には $\dim M_p = 1$(defining 1-form の独立性が保たれる) だが退化して $\dim M_p > 1$ になる可能性がある. 実際に次が成り立つ.

Proposition 5.5. $\dim M_p = 1$ *or* $\dim M_p = 2$.

より詳細にその退化の様子は次のように過剰決定系としての分類と対応する:

Theorem 5.6. 仮定 *1* を満たす *type-changing* 方程式の *Monge* 特性系と過剰決定系としての構造の対応は次で与えられる*:*

$$\begin{aligned} \dim M_p = 1 &\iff (ii)\text{-}type\ or\ (0)\text{-}type \\ \dim M_p = 2 &\iff (i)\text{-}type \end{aligned}$$

参考文献

[BCG3] R. Bryant, S. S. Chern, R. Gardner, H. Goldscmidt, P. Griffiths, Exterior Differential Systems, MSRI Publ. vol. **18**, Springer Verlag, Berlin (1991).

[C] E. Cartan, Les systèmes de Pfaff à cing variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. École Normale, **27** (1910), 109–192.

[NS1] T. Noda, K. Shibuya, Second order type-changing PDE for a scalar function on a plane, Osaka J. Math. 49 (2012), no 1, 101-124

[NS2] T. Noda, K. Shibuya, Type-changing PDE and singularities of Monge characteristic systems, submitted.

[Y1] K. Yamaguchi, Contact geometry of higher order, Japan. J. Math., **8** (1982), 109–176.

[Y2] K. Yamaguchi, Geometrization of jet bundles, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 27–40.